

Westfälische Wilhelms-Universität Münster  
Institut für Informatik  
Einsteinstraße 62  
48149 Münster

WS 2004/05

# **Repräsentation geradliniger Graphen**

Johannes Schwall\*

10. Februar 2005

## Zusammenfassung

This paper is based on an article by István Fáry from 1948 and is about the representation of straight-line graphs. Fáry states, that „if a [simple and] finite graph can be represented on the plane at all, it can be represented with straight segments as edges“ (see Fáry (1948)). Several lemmata are used to build the basis of the theorem’s proof which is presented as their conclusion. As an outlook some examples of further research are given.

Diese Arbeit basiert auf einem Artikel von István Fáry aus dem Jahre 1948 zur Repräsentation geradliniger Graphen. Fáry nutzt eine Reihe von Lemmata um zu zeigen, dass ein einfacher und finiter Graph, sofern er in einer Ebene gezeichnet werden kann, in jedem Fall mit geradlinigen Kanten dargestellt werden kann. Die notwendigen Lemmata werden bewiesen und, als ihr Ergebnis, Fárays Theorem präsentiert. Außerdem wird ein knapper Ausblick auf anschließende und weiterführende Forschungen gegeben.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Einleitung</b>	<b>2</b>
<b>2. Das Theorem und grundlegende Definitionen</b>	<b>3</b>
<b>3. Notwendige Lemmata und ihre Beweise</b>	<b>7</b>
<b>4. Schluss und Zusammenfassung</b>	<b>15</b>
<b>A. Plagiierte Hausarbeiten</b>	<b>17</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>18</b>

# 1. Einleitung

Die vorliegende Ausarbeitung basiert auf einem Text von István Fáry (Fáry (1948)) aus Szeged, Ungarn, der mit dieser Arbeit bereits 1948 zeigte, dass es möglich ist, einen einfachen, finiten Graphen, der sich in einer Ebene zeichnen lässt, mit ausschließlich geradlinigen Segmenten als Kanten zu zeichnen.

Zu Beginn wird in Kapitel 2 das Theorem ausführlich dargestellt sowie ein Ausblick auf die Beweisfolge gegeben. Darüber hinaus werden grundlegende Definitionen, die für die Betrachtung der Lemmata und Beweise benötigt werden. Kapitel 3 beinhaltet die von Fáry verwendeten Lemmata sowie deren Beweise, die sich auf die Betrachtung von Zyklen und Teilgraphen stützen. Daraus wird das Theorem entwickelt, dessen Auswirkungen in Kapitel 4 nochmals aufgegriffen werden. Darüber hinaus wird auf mögliche Anwendungen bzw. Weiterentwicklungen der Idee verwiesen.

## 2. Das Theorem und grundlegende Definitionen

István Fáry fasste 1948 die Ergebnisse seiner Forschungsarbeit in dem folgenden Theorem zusammen:

*Jeder einfache Graph ist äquivalent  
zu einem geradlinigen Graphen.*

Dieser zunächst klar und leicht nachvollziehbar erscheinenden Darstellung liegen allerdings eine Reihe von Lemmata zu Grunde, die erst gemeinsam zum Beweis des Theorems führen. Vor dem Herleiten dieser Lemmata soll jedoch eine genauere Betrachtung des Theorems erfolgen, um seine Auswirkungen zu verdeutlichen. Und so ergibt der Versuch, Fárys Theorem anders zu formulieren, folgendem Satz „Jeder Graph, der in einer Ebene darstellbar ist und keine zwei Kanten hat die zwei gleiche Knoten haben, ist mit ausschließlich geradlinigen Kanten darstellbar.“

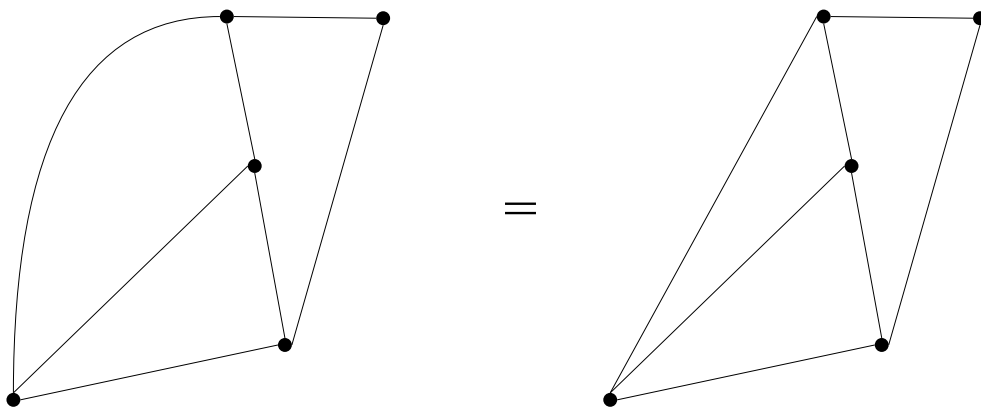


Abb. 2.1.: Fárys Theorem besagt, dass jeder einfache, finite Graph, der in einer Ebene dargestellt werden kann, mit geradlinigen Kanten gezeichnet werden kann.

Die Idee, mit der Fary sein Theorem zum Beweis führt, stellt sich in einem groben Überblick wie folgt dar: Am Anfang steht die Annahme, das Theorem gelte bereits für einen Graphen mit  $n$  Knoten. Daraufhin entwickelt er einen Graphen  $G$  mit  $n + 1$  Knoten und ohne mehrfache Kanten, den er durch Zusammenschrumpfen einer Kante  $K$  in einen an  $K$  angrenzenden Knoten  $P$  in einen Graphen  $G^*$  überführt, der seinerseits wiederum lediglich  $n$  Knoten besitzt.

Unter der Annahme, dass  $G^*$  keine multiplen (mehrfachen) Kanten besitzt, kann der Graph mit geradlinigen Kanten gezeichnet werden. Anschließend ist die zum Punkt geschrumpfte Kante wieder zu einer kurzen, geradlinigen Kante zu strecken, so dass sich der ursprüngliche Graph  $G$  ergibt.  $G$  hat dann auf jeden Fall ausschließlich geradlinigen Kanten.

Sollte  $G^*$  multiple Kanten besitzen, so macht Fary sich die Eigenschaft des Graphen zu nutze, dass  $G^*$  durch einen Zyklus<sup>1</sup> von drei Kanten in zwei separate Teilgraphen<sup>2</sup> geteilt werden kann: ein Teilgraph liegt innerhalb, der andere außerhalb des Zyklus. Zeichnet man diese dann mit geradlinigen Kanten, so erhält man ebenfalls eine geradlinige Repräsentation des Graphen  $G$ .

Bereits bei dieser – noch recht knappen – Betrachtung von Farys Vorgehen werden Begriffe benötigt, deren weitere Verwendung einiger kurzer Definitionen bedarf, und die vor dem Betrachten der eigentlichen Lemmata und der zugehörigen Beweise im Folgenden eingeführt werden sollen.

## Wichtige Definitionen

Am Anfang steht die Definition des *einfachen Graphen*<sup>3</sup> (Abb. 2.2). Dieser zeichnet sich dadurch aus, dass er keine mehrfachen (multiplen) Kanten hat. Tutte (1998, S. 2) spricht auch von einem „strict graph“ und definiert diesen als „an unweighted, undirected graph containing no self-loops“. Weiterhin ist ein *finiter Graph* dann ein Graph mit einer endlich Zahl von Knoten und Kanten: „A graph with a finite number of nodes and edges. If it has  $n$  nodes and has no multiple edges or graph loops (i.e., it is simple), it is a subgraph of the complete graph  $K_n$ .“ (Weisstein. *MathWorld: Finite Graph*)

einfacher  
Graph

finiter Graph

<sup>1</sup>Fary (1948): „circuit“, Definition s. S. 9

<sup>2</sup>Fary (1948): „subgraph“, Definition s. S. 8

<sup>3</sup>Fary (1948): „simple graph“

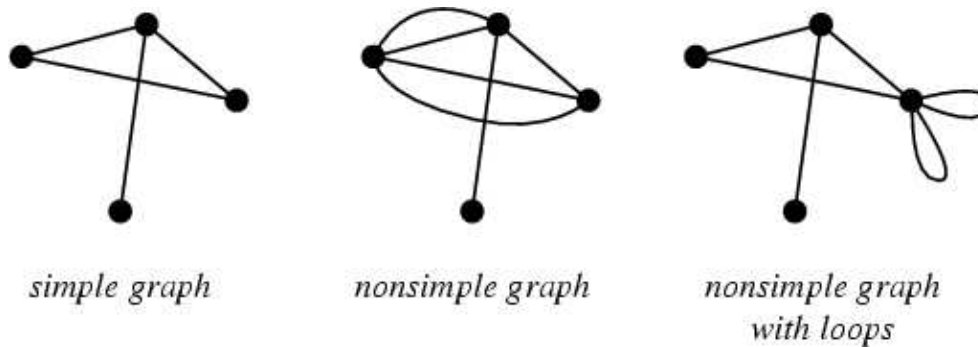


Abb. 2.2.: Einfacher Graph, Quelle: MathWorld  
(<http://mathworld.wolfram.com/SimpleGraph.html>)

Dann kann nach Weisstein. *MathWorld: Planar Graph Planarität* für Graphen folgendermaßen beschrieben werden: „A graph is planar if it can be drawn in a plane without graph edges crossing (i. e., it has graph crossing number 0).“ Ein finiter Graph ist also planar, wenn er in einer Ebene dargestellt werden kann. Laut Fáry (1948) müssen dabei die Kanten Jordan-Kurven<sup>4</sup> sein, die sich lediglich an den Endpunkten treffen, die wiederum die Knoten des Graphen sind.

Planarität

Weiterhin heißt ein Graph *geradlinig*<sup>5</sup>, gerade dann, wenn jede seiner Kanten geradlinig ist. Ein Graph hat mehrfache („multiple“) Kanten, wenn zwei oder mehr Kanten die gleichen Endpunkte haben. Man spricht dann von einem mehrfachen oder auch *Multigraphen* (Abb. 2.3).

geradliniger  
Graph

Multigraph

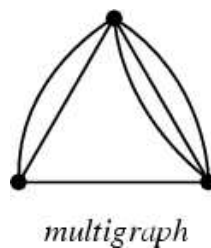


Abb. 2.3.: Graph mit mehrfachen Kanten, Quelle: MathWorld  
(<http://mathworld.wolfram.com/MultiGraph.html>)

Die Ebene eines jeden Graphen ist durch seine Kanten in mehrere Bereiche, genannt *Gebiete des Graphen*<sup>6</sup>, unterteilt. Erweitert man diese Definition um die Voraussetzung, dass alle Gebiete eines Graphen durch einen Zyklus von

Gebiete eines  
Graphen

<sup>4</sup>„A Jordan curve is a plane curve which is topologically equivalent to (a homeomorphic image of) the unit circle, i.e., it is simple and closed.“ (Weisstein. *MathWorld: Jordan Curve*)

<sup>5</sup>Fáry (1948): „straight graph“

<sup>6</sup>Es wird auch von Bereichen oder Regionen des Graphen gesprochen; Fáry (1948, S. 230) verwendet den Ausdruck „regions of the graph“.

drei Kanten begrenzt sind, so spricht man von einem *triangulierten Graphen*: „A planar graph on  $n$  vertices with  $3n - 6$  edges is necessarily maximal, such graphs are called planar triangulations.“ (Godsil und Royle (2001, S. 13))

triangulierter  
Graph

Jeder Graph verfügt dabei über sich *berührende Elemente*<sup>7</sup>: Ein Knoten berührt eine Kante, wenn er der Endpunkt dieser Kante ist. Ebenso berührt ein Knoten oder eine Kante das Gebiet eines Graphen, wenn dieser Knoten bzw. die Kante an das Gebiet des Graphen angrenzt. (siehe Fáry (1948, S. 230))

berührende  
Elemente

Neben diesen Definitionen wird im Folgenden die *Äquivalenz von Graphen* benötigt: Zwei Graphen  $G$  und  $G'$  heißen äquivalent, wenn eine eins-zu-eins-Gleichheit zwischen ihren Knoten, Kanten und Regionen besteht. Dies, so Fáry (1948, S. 230), ist der Fall, wenn zum Einen berührende Elemente des einen mit berührenden Elementen des anderen Graphen korrespondieren, und zum Anderen auch unbegrenzte Regionen, also Regionen, die den uneigentlichen Punkt<sup>8</sup> enthalten, übereinstimmen.

Äquivalenz  
von Graphen

Weitere Grundlagen für den Umgang mit planaren Graphen und detailliertere Ausführungen der hier verwendeten Definitionen finden sich beispielsweise bei Diestel (1997, S. 67 ff.).

---

<sup>7</sup>Fáry (1948): „adjoining elements“

<sup>8</sup>Fáry (1948) benutzt den Ausdruck „the region containing the point at infinity“, wobei dieser Punkt bei Weisstein. *MathWorld: Point at Infinity* wie folgt definiert wird: „It can [...] be thought of as the point of intersection of two parallel lines.“ Im Deutschen wird auch vom *uneigentlichen Punkt* oder dem *unendlich entfernten Punkt* gesprochen. Die unbegrenzte Region ist dann also jene Region, die diesen uneigentlichen Punkt enthält.



### 3. Notwendige Lemmata und ihre Beweise

Zum Verifizieren des von Fary vorgestellten Theorems werden mehrere Lemmata benötigt, im Folgenden dargestellt werden sollen. Am Anfang steht die folgende Aussage:

**Lemma 1** *Wenn ein Graph äquivalent zu einem geradlinigen Graphen ist, so ist jeder Teilgraph ebenfalls äquivalent zu einem geradlinigen Graphen.*

Die Korrektheit des Theorems ergibt sich dann aus Lemma 1 gemeinsam mit den folgenden Lemmata 2 und 3, deren Beweise sich auf den Seiten 8 bzw. 13 finden.

**Lemma 2** *Jeder einfache Graph ist Teilgraph eines einfachen, triangulierten Graphen.*

**Lemma 3** *Jeder einfache, triangulierte Graph ist äquivalent zu einem geradlinigen Graphen.*

Für den Beweis von Lemma 3 (S. 13) ist zuvor die Korrektheit der folgenden Lemmata 4 (S. 10) und 5 (S. 12) zu zeigen, die die Grundlage des Beweises von Lemma 3 darstellen.

**Lemma 4**  *$G$  sei ein einfacher, triangulierter Graph mit mindestens 4 Knoten. Wenn  $PP_1, PP_2, \dots, PP_k$  Kanten sind, die in zyklischer Reihenfolge in  $P$  beginnen, dann sind  $P_1P_2, P_2P_3, \dots, P_kP_1$  in  $G$  enthalten und formen einen Zyklus  $C_p$ , der  $P$  von jedem anderen Knoten von  $G$  trennt.*

**Lemma 5** Wenn  $G^*$  kein einfacher Graph ist, hat  $G$  einen Zyklus von drei Kanten, die zwei Knoten separieren.

### Beweis zu Lemma 1

Hierzu soll nun der nötige Beweis vorgebracht werden. Dazu sei  $G'$  ein gegebener Graph mit einer Region  $D$  und den Knoten  $P$  und  $Q$ , die  $D$  berühren, wie in Abb. 3.1 (a) dargestellt. Dabei gilt  $P \neq Q$ . Werden  $P$  und  $Q$  innerhalb von  $D$  mit einer Kante verbunden, erhält man den Graphen  $G$  (Abb. 3.1 (b)). Ist dieser Graph  $G$  geradlinig, so erhält man durch Weglassen der soeben eingefügten Kante einen geradlinigen Graphen, der äquivalent zu  $G'$  ist (Abb. 3.1 (c)).

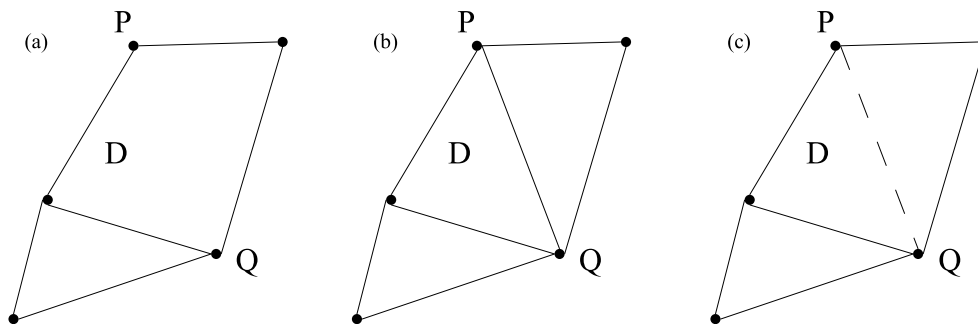


Abb. 3.1.: Entwicklung des Graphen nach Lemma 1

Nun kann leicht durch Induktion Lemma 1 hergeleitet werden, denn das Weglassen einer weiteren (oder einer anderen) Kante führt zu einem weiteren Teilgraphen, der ebenfalls geradlinig sein muss.

### Beweis zu Lemma 2

Als nächster Schritt ist nun der Beweis von Lemma 2 (S. 7) anzugeben. Dazu sei  $G$  ein einfacher Graph mit mindestens vier Knoten. Es soll ein triangulierter, einfacher Graph  $G'$  konstruiert werden, der  $G$  als Teilgraphen hat. Ein Teilgraph ist dabei definiert wie folgt: „We set  $G \cup G' := (V \cup V', E \cup E')$  and  $G \cap G' := (V \cap V', E \cap E')$ . [...] If  $V' \subseteq V$  and  $E' \subseteq E$ , then  $G'$  is a subgraph of  $G$  (and  $G$  a supergraph of  $G'$ ), written as  $G' \subseteq G$ . Less formally, we say that  $G$  contains  $G'$ .“ (Diestel (1997, S. 3))

Zur Konstruktion werden hier zwei Knoten  $P$  und  $Q$  gewählt, die an eine Region  $D$  grenzen, aber nicht verbunden sind. Die Knoten werden nun durch eine neu einzufügende Kante verbunden, die dann innerhalb von  $D$  liegt.

Per Definition muss dieser neue Graph  $G_1$  ein einfacher Graph sein, da die beiden Punkte zuvor nicht verbunden waren. Iterativ kann so nun für alle Graphen  $G_i$  zur Konstruktion von  $G_{i+1}$  (für  $i = 1, 2, 3, \dots$ ) vorgegangen werden. Aufgrund der während der Iteration gleich bleibenden Zahl der Knoten wird endlich ein Graph  $G_k$  erreicht, zu dem kein  $G_{k+1}$  mehr erzeugt werden kann, da andernfalls  $G_{k+1}$  kein einfacher Graph sein würde.  $G_k$  ist dann derart verbunden, dass jedes Knotenpaar, das an dasselbe Gebiet angrenzt, durch eine Kante verbunden ist. Dieser Graph  $G_k$ , der gleich dem gesuchten Graphen  $G'$  ist, ist vollständig verbunden, wie folgende Definition für die Verbundenheit von Graphen zeigt: „A graph which is connected in the sense of a topological space, i.e., there is a path from any point to any other point in the graph.“ (Weisstein. *MathWorld: Connected Graph*<sup>9</sup>). Wäre  $G_k$  nicht vollständig verbunden, so würde noch eine Region  $D$  existieren, die an verschiedene Teile des Graphen  $G'$  angrenzt und es könnten zwei Punkte  $P$  und  $Q$  gewählt werden, die in verschiedenen Teilen von  $G'$  liegen und beide an dieses Gebiet des Graphen grenzen. Diese wären aber nach der abgeschlossenen Iteration durch eine Kante verbunden, was ein Widerspruch wäre.

Im Anschluss zeigt Fáry, dass der einfache, verbundene Graph  $G'$  trianguliert ist, also jedes Gebiet  $D$  in  $G'$  durch einen Zyklus von drei Kanten verbunden ist. Ein solcher Zyklus ist definiert als ein geschlossener Pfad: „If  $P = x_0 \dots x_{k-1}$  is a path and  $k \geq 3$ , then the graph  $C := P + x_{k-1}x_0$  is called a *cycle*. As with paths, we often denote a cycle by its (cyclic) sequence of vertices; the above cycle  $C$  might be written as  $x_0 \dots x_{k-1}x_0$ .“ (Diestel (1997, S. 7))

Um die im Lemma geforderte Triangulation zu zeigen, nimmt Fáry den Grundsatz zu Hilfe, dass an der Grenze zu jedem Gebiet eines solchen Graphen immer eine Kante sein muss. Falls nun lediglich zwei Knoten an dieses Gebiet grenzen, so besteht der Graph ausschließlich aus dieser einen Kante, weil es sich um einen verbundenen Graphen handelt. Würden also lediglich ein oder zwei Kanten an  $D$  grenzen, so hätte  $G'$  (und folglich auch der zugrunde liegende Graph  $G$ ) maximal drei Knoten, da es sich um einen einfachen

<sup>9</sup>Zur Verbundenheit von Graphen siehe auch Diestel (1997, S. 43 ff.).

und verbundenen Graphen handelt. Da dies aber der Voraussetzung widerspricht, muss es mindestens drei Kanten an der Grenze von  $D$  geben. Falls diese keinen Zyklus bilden, existieren mindestens vier Knoten  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  und  $S$  auf dieser Grenze. Da der Graph  $G'$  aber, wie oben erläutert, Kanten besitzt, die alle diese an  $D$  angrenzenden Knoten verbinden, wird die Ebene so in vier Gebiete geteilt, die jeweils nur drei Knoten an ihrer Grenze haben. Daher kann das Gebiet  $D$  nicht alle vier Knoten auf seiner Grenze haben.

Dieser Widerspruch beweist, dass alle Gebiete des Graphen  $G'$  durch Zyklen von jeweils drei Kanten begrenzt sind.  $G'$  ist also ein triangulierter Graph. Gleichzeitig ist damit auch Lemma 2 bewiesen, denn der einfache, triangulierte Graph  $G'$  wurde aus dem einfachen Graphen  $G$  entwickelt, der somit Teilgraph von  $G'$  ist: „Jeder einfache Graph ist Teilgraph eines einfachen, triangulierten Graphen.“

Gemeinsam mit Lemma 3 („Jeder einfache, triangulierte Graph ist äquivalent zu einem geradlinigen Graphen.“) kann nun das Theorem bewiesen werden. Zur Erinnerung: Das Theorem besagt, dass jeder einfache Graph äquivalent zu einem geradlinigen Graphen ist. Der Beweis von Lemma 3 setzt allerdings die Lemmata 4 und 5 voraus, deren Beweise nun vorgezogen werden sollen.

#### Beweis zu Lemma 4

Fáry formuliert Lemma 4 wie folgt: „ $G$  sei ein einfacher, triangulierter Graph mit mindestens 4 Knoten. Wenn  $PP_1, PP_2, \dots, PP_k$  Kanten sind, die in zyklischer Reihenfolge in  $P$  beginnen, dann sind  $P_1P_2, P_2P_3, \dots, P_kP_1$  in  $G$  enthalten und formen einen Zyklus  $C_p$ , der  $P$  von jedem anderen Knoten von  $G$  trennt.“<sup>10</sup>

Zum Beweis soll zunächst angenommen werden, dass  $P$  nicht auf der Grenze der unbeschränkten Region liegt.  $P$  befindet sich also innerhalb eines oder mehrerer Zyklen des Graphen und folglich existiert ein innerster Zyklus  $C'_p$  mit den Knoten  $P'_1, P'_2, \dots, P'_m$ , der  $P$  umschließt. Die an  $P'_i P'_{i+1}$  angrenzende Region, die innerhalb des Zyklus  $C'_p$  liegt, hat einen dritten Knoten  $P'$  auf seiner Grenze. Dann gilt  $P' = P$ , denn wenn  $P' \neq P$  wäre, würde der Zyklus

<sup>10</sup>„Let  $G$  be a simple triangulated graph which has at least four nodes. If  $PP_1, PP_2, \dots, PP_k$  are all the edges starting from  $P$ , in their cyclic order, then the edges  $P_1P_2, P_2P_3, \dots, P_kP_1$  are contained in  $G$  and form a circuit  $C_p$  which separates  $P$  from every other node of  $G$ .“ (s. Fáry (1948, S. 231))

$[P'_1P'_2, P'_2P'_3, \dots, P'_iP', P'P'_{i+1}, \dots, P'_mP'_1]$  den Knoten  $P$  in seinem Inneren enthalten und gleichzeitig innerhalb von  $C'_p$  liegen. Dies wäre ein Widerspruch zur Annahme, nach der  $C'_p$  der innerste Zyklus ist der  $P$  beinhaltet.

Es folgt also, dass alle dreieckigen Gebiete, die an die Kanten von  $C'_p$  angrenzen, den gemeinsamen Punkt  $P$  haben, der sie zu dreieckigen Gebieten vervollständigt. Da  $G$  keine multiplen Kanten hat, bilden diese Gebiete einen einfach verbundenen Bereich. Mit anderen Worten: sie füllen das Innere von  $C'_p$  aus. Da  $G$  wiederum, abgesehen von  $P$ , keine Punkte innerhalb von  $C'_p$  hat, stimmt  $C'_p$  notwendiger Weise mit  $C_p$  überein. Mit der Existenz dieses Zyklus und dem inneren Punkt  $P$  ist folglich Lemma 4 für diesen Fall bewiesen.

Noch zu behandeln ist der Fall, dass  $P$  doch auf der Grenze der unbeschränkten Region liegt. Dieser Fall kann analog behandelt werden, obwohl die Gleichheit nicht auf den ersten Blick auffällt: Nun ist  $[P_1P_2, P_2P_3, \dots, P_kP_1]$  der am weitesten außen gelegene Zyklus, der  $P$  in seinem Äußeren hat. Der Beweis erfolgt dann genau wie oben und somit ist Lemma 4 auch für diesen Fall (und damit vollständig) bewiesen.

Nun ist noch die Korrektheit Lemma 5 zu zeigen, bevor der Beweis von Lemma 3 möglich wird. Als Grundlage für den Beweis von Lemma 5 ist noch die Konstruktion eines Graphen  $G^*$  notwendig, von dem der in Lemma 5 verwendete Graph  $G$  abhängt. Dazu wird  $G$  als ein triangulierter, einfacher Graph mit mehr als drei Knoten definiert. Da der Beweis über eine Induktion geführt wird, soll nun aus  $G$  ein Graph  $G^*$  mit einem Knoten weniger konstruiert werden.  $G^*$  muss dabei nicht notwendigerweise ein einfacher Graph sein.

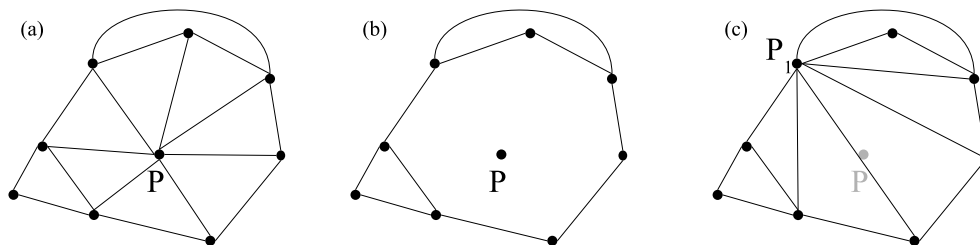


Abb. 3.2.: Konstruktion des Ausgangsgraphen für Lemma 5

Sei nun  $P$  ein Knoten des Ausgangsgraphen  $G$ , der nicht an der unbegrenzten Region, sondern innerhalb des Graphen  $G$  liegt (Abb. 3.2 (a)). Dann gibt es auch hier einen Zyklus  $C_P$ , der  $P$  derart umschließt, wie es in Lemma 4

gezeigt worden ist. Werden nun alle in  $P$  beginnenden Kanten aus dem Graphen  $G$  entfernt, erhält man einen neuen Graphen, der außerhalb von  $C_P$  mit  $G$  identisch, innerhalb von  $C_P$  jedoch leer ist (Abb. 3.2 (b)). In einem weiteren Schritt wird dann ein Punkt  $P_1$  gewählt, der auf  $C_P$  liegt. Dieser wird mit allen weiteren Punkten  $P_3, P_4, \dots, P_{k-1} \in C_P$  verbunden, so dass diese neuen Kanten innerhalb von  $C_P$  liegen und sich gegenseitig nicht schneiden. Dies ist der neue Graph  $G^*$ , wie in Abb. 3.2 (c) dargestellt.

**Beweis zu Lemma 5**

Die Verbindung zwischen den beiden Graphen  $G$  und  $G^*$  hält Fáy in Lemma 5 fest, das im Folgenden bewiesen werden soll: Wenn  $G^*$  kein einfacher Graph ist, hat  $G$  einen Zyklus von drei Kanten, die zwei Knoten voneinander trennen.

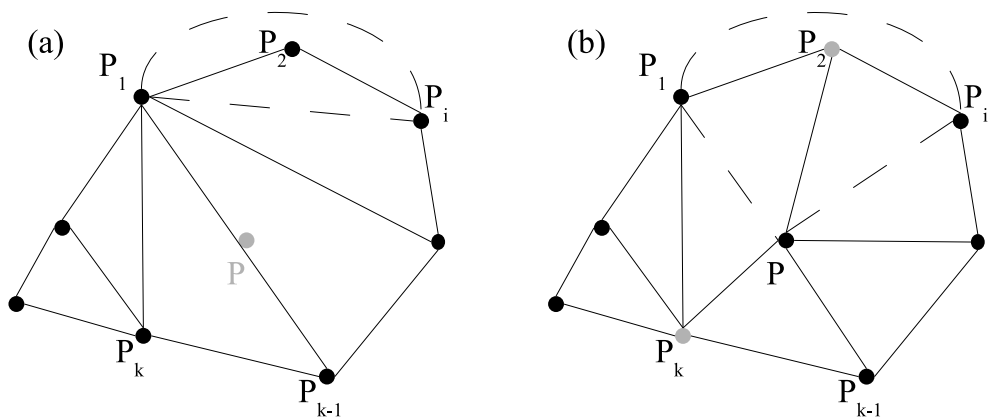


Abb. 3.3.: Beweis zu Lemma 5

Dazu nimmt er an, dass  $G^*$ , wie bereits im Lemma angedeutet, kein einfacher Graph ist. Dies kann nur der Fall sein, wenn zwei Knoten, die durch eine der neuen Kanten verbunden wurden, bereits zuvor durch eine Kante außerhalb von  $C_P$  verbunden waren. Da alle neu eingefügten Kanten in  $P_1$  beginnen, existiert dann ein Knoten  $P_i$  (mit  $2 \leq i \leq k - 1$ ), der mit  $P_1$  über eine Kante außerhalb von  $C_P$  verbunden ist (Abb. 3.3 (a)). Da nun aber die Knoten  $P_1, P_2, P_i, P_k$  notwendig in dieser Reihenfolge auf  $C_P$  liegen und außerdem gilt, dass sie alle nicht übereinstimmen (also  $P_1 \neq P_2 \neq P_i \neq P_k$ ), muss der Zyklus  $[P_1P, PP_i, P_iP_1]$  im Ausgangsgraphen  $G$  zwangsläufig die Knoten  $P_2$  und  $P_k$  trennen. Die Verbindung  $P_iP_1$  liegt dabei außerhalb von  $C_P$  (Abb. 3.3 (b)). Somit ist das Lemma 5 ebenfalls bewiesen.

### Beweis zu Lemma 3

Der Beweis der Korrektheit der Lemmata 4 und 5 erlaubt den nun anschließenden Beweis von Lemma 3. Mit diesem Beweis wird die Beweisfolge für das Theorem abgeschlossen. Nachdem bereits gezeigt wurde, dass jeder einfache Graph Teilgraph eines einfachen, triangulierten Graphen ist (Lemma 2), besagt nun Lemma 3, dass jeder einfache, triangulierte Graph äquivalent zu einem geradlinigen Graphen ist. Da diese Aussage für Graphen mit drei Knoten trivial ist, nimmt Fáry an, dass das Lemma für Graphen mit  $\nu$  Knoten ( $2 \leq i \leq k - 1$ ) gilt.

Sei nun  $G$  ein Graph mit  $n+1$  Knoten, sowie  $P$  ein Knoten von  $G$ , der nicht an die unbegrenzte Region von  $G$  angrenzt. Dann kann der Graph  $G^*$  konstruiert werden wie für Lemma 5 gezeigt. Nun sind zwei Fälle zu unterscheiden:

1.  **$G^*$  ist ein einfacher Graph:** Falls  $G^*$  ein einfacher Graph ist, existiert nach der Annahme des Theorems ein geradliniger Graph  $\overline{G}^*$ . Dazu bezeichnet  $\overline{X}$  den Knoten aus  $\overline{G}^*$ , der  $X$  aus  $G^*$  entspricht. Betrachtet man nun den Zyklus  $\overline{C}_P = [\overline{P}_1\overline{P}_2, \dots, \overline{P}_k\overline{P}_1]$  des geradlinigen Graphen  $\overline{G}^*$ , so wird klar, dass die geraden Linien durch  $\overline{P}_i\overline{P}_{i+1}$  für  $2 \leq i \leq k - 1$  nicht durch  $\overline{P}_1$  gehen, weil sonst die Kanten  $\overline{P}_1\overline{P}_i$  und  $\overline{P}_1\overline{P}_{i+1}$  ein gemeinsames Segment haben würden, bzw. es sich folglich nicht um einen einfachen Graphen handeln würde.

Nun teilt die Gerade durch die Knoten  $\overline{P}_i$  und  $\overline{P}_{i+1}$  (mit  $2 \leq i \leq k - 1$ ) die Ebene des Graphen in zwei Hälften, wobei eine dieser Hälften den Knoten  $\overline{P}_1$  enthält. Sei diese Hälfte nun mit  $K'$  bezeichnet wird, so kann die Schnittfläche von  $K'$  und dem von  $\overline{C}_P$  eingeschlossenen Bereich des Graphen betrachtet und diese als  $K$  bezeichnet werden. Dann ist leicht zu sehen, dass jede Kante, die einen beliebigen Knoten innerhalb von  $K$  mit einem der auf  $\overline{C}_P$  liegenden Punkte verbindet, abgesehen von seinem Endpunkt innerhalb von  $\overline{C}_P$  liegt.

Fáry entfernt dann die Kanten  $\overline{P}_1\overline{P}_3$ ,  $\overline{P}_1\overline{P}_4$ ,  $\overline{P}_1\overline{P}_{k-1}$  aus  $\overline{G}^*$  und sorgt so dafür, dass das Innere von  $\overline{C}_P$  leer ist. Nun wird ein beliebiger Punkt  $\overline{P}$  innerhalb von  $K$  gewählt und derart verbunden, dass die Kanten  $\overline{P}\overline{P}_1$ ,  $\overline{P}\overline{P}_2$ ,  $\dots$ ,  $\overline{P}\overline{P}_k$  entstehen. Dieser neue Graph ist gleich dem Ausgangsgraphen  $G$ , womit Lemma 3 für diesen Fall bewiesen ist.

2.  **$G^*$  ist kein einfacher Graph:** Falls  $G^*$  kein einfacher Graph ist, gibt es nach Lemma 5 wieder einen Zyklus  $Z$ , bestehend aus drei Kanten, in  $G$ , der zwei Knoten voneinander trennt. Dann bilden  $Z$  und die angrenzenden Kanten außerhalb von  $Z$  einen triangulierten Graphen  $G_1$ . Ebenso bilden  $Z$  und die inneren Kanten von  $Z$  einen zweiten triangulierten Graphen  $G_2$ . Da insgesamt  $n + 1$  Knoten vorhanden sind und jeweils mindestens ein Knoten von  $G_1$  bzw.  $G_2$  durch den Zyklus  $Z$  abgetrennt ist, haben beide Graphen höchstens  $n$  Knoten.

Seien nun  $\overline{G}_i$  (mit  $i = 1, 2$ ) die  $G_1$  bzw.  $G_2$  entsprechenden geradlinigen Graphen. Dann ist der mit  $Z$  korrespondierende Zyklus  $Z_1$  in  $\overline{G}_1$  in seinem Innern leer.  $\overline{G}_2$  liegt innerhalb von  $Z_2$ , das ebenfalls mit  $Z$  übereinstimmt (siehe dazu die Definition von Äquivalenz auf S. 6). Dann kann mit einer entsprechenden affinen Transformation<sup>11</sup>  $Z_2$  in  $Z_1$  überführt werden, so dass angrenzende Gebiete aus  $G$  auch hier zu angrenzenden Gebieten werden. Dann ist Lemma 3 auch für diesen Fall des multiplen Graphen bewiesen.

Zum Schluss soll nun noch einmal die Beweisfolge aufgezeigt werden. Zunächst wurde gezeigt, dass, wenn ein Graph äquivalent zu einem geradlinigen Graphen ist, jeder Teilgraph dieses Graphen ebenfalls äquivalent zu einem geradlinigen Graphen ist (Lemma 1, S. 7). Sodann konnte nachgewiesen werden, dass jeder einfache Graph Teilgraph eines einfachen, triangulierten Graphen (Lemma 2, S. 7) und außerdem jeder einfache, triangulierte Graph wiederum äquivalent zu einem geradlinigen Graphen ist (Lemma 3, S. 7). Offensichtlich geht daraus direkt das zu zeigende Theorem hervor, das somit als bewiesen gelten kann: „Jeder einfache Graph ist äquivalent zu einem geradlinigen Graphen.“

<sup>11</sup> „An affine transformation is any transformation that preserves collinearity (i.e., all points lying on a line initially still lie on a line after transformation) and ratios of distances (e.g., the midpoint of a line segment remains the midpoint after transformation). In this sense, affine indicates a special class of projective transformations that do not move any objects from the affine space  $\mathbb{R}^3$  to the plane at infinity or conversely. An affine transformation is also called an affinity.“ (Weisstein. *MathWorld: Affine Transformation*)



## 4. Schluss und Zusammenfassung

Wenngleich sich nicht auf den ersten Blick direkte Anwendungen von Fárys Theorem ergeben, so lassen sich doch diverse Szenarien entwerfen, in denen sich die geradlinige Repräsentation von planaren Graphen als sehr nützlich erweisen dürfte.

Bis heute gibt es viele Anwendungen, bei denen die hier vorgestellten Eigenschaften essenzielle Grundlagen darstellen. Es sollen beispielhaft einige aufgeführt werden:

- Auf Fárys Idee aufbauend geht Schnyder<sup>12</sup> weiter und legt ein Gitter unter die Knoten des Graphen. Ebenso folgten in den 1970-er Jahren zahlreiche Algorithmen, die die hier dargestellten Verfahren als Grundlagen nehmen, so z. B. das Testen auf Planarität nach Hopcroft/Tarjan<sup>13</sup>.
- Matula, Marble und Isaacson (1972) beschäftigen sich mit der Colorierung von Graphen und gehen dabei besonders auch auf planare Graphen ein. Sie zeigen, dass der SLI-Algorithmus in der Lage ist, jeden planaren Graphen in fünf oder weniger Farben zu colorieren.
- Ein direkter Schluss für die Anwendungsgebiete Straßenplanung oder Platinenentwurf wäre z. B., dass es grundsätzlich möglich ist, alle Verbindungen direkt zu ziehen und somit ggf. Kosten zu sparen.
- Ebenfalls naheliegend ist auch eine Konsequenz für die Speicherung von Graphen im Computer: in geradliniger Darstellung lässt sich ein

---

<sup>12</sup>Schnyder. *Grid-embedding algorithm*

<sup>13</sup>Hopcroft/Tarjan. *Efficient Planarity Testing*

Graph deutlich günstiger speichern und verarbeiten. Für Ansätze hierzu siehe Erten und Kobourov<sup>14</sup>.

Selbstverständlich finden sich allgemeine Anwendungen für planare Graphen zuhauf. Diese reichen von ernsthaften bis zu nicht ganz so ernsthaften. Zu ersteren zählt sicherlich die Implementierung LEDA<sup>15</sup>, die ursprünglich am Max-Planck-Institut in Saarbrücken entstanden ist. Dabei handelt es sich um eine „Klassenbibliothek für die bequeme Lösung vieler Probleme der Informatik“<sup>16</sup>, die u. a. auch fertige Implementierungen für planare Graphen beinhaltet<sup>17</sup>. Zu den nicht ganz so ernsthaften Anwendungen dürfte dagegen die auf der Internetseite von Hochstättler<sup>18</sup> vorgestellte zählen.

---

<sup>14</sup>Erten und Kobourov. *Simultaneous Embedding of a Planar Graph and Its Dual on the Grid*

<sup>15</sup>Algorithmic Solutions Software. *LEDA. Library for Efficient Data types and Algorithms*

<sup>16</sup>Uhrig. *LEDA*

<sup>17</sup>Ziegler. *LEDA. Algorithmen für planare Graphen*

<sup>18</sup>Hochstättler. *Zur Topologie des Fußballs*

# Anhang A.

## Plagiierte Hausarbeiten

Ein Plagiat liegt vor, wenn Texte Dritter ganz oder teilweise, wörtlich oder nahezu wörtlich übernommen und als eigene wissenschaftliche Leistung ausgegeben werden. Ein solches Vorgehen widerspricht nicht nur guter wissenschaftlicher Praxis, es ist auch eine Form geistigen Diebstahls und damit eine Verletzung des Urheberrechts. (Resolution des Deutschen Hochschulverbandes vom 17. Juli 2002)

Handelt es sich bei einer Hausarbeit nachweislich um ein Plagiat – z. B. indem im Internet zugänglich gemachte Hausarbeiten anderer auf die oben beschriebene Art und Weise übernommen wurden – wird sie als ungenügend bewertet. In diesem Fall wird kein Leistungsnachweis ausgeteilt. Auch eine Wiederholung der Arbeit (im Rahmen des entsprechenden Seminars) ist nicht möglich.

### Erklärung des Studierenden

Hiermit versichere ich, dass die vorliegende Arbeit über die *Repräsentation geradliniger Graphen* selbstständig verfasst worden ist, dass keine anderen Quellen und Hilfsmittel als die angegebenen benutzt worden sind und dass die Stellen der Arbeit, die anderen Werken – auch elektronischen Medien – dem Wortlaut oder Sinn nach entnommen wurden, auf jeden Fall unter Angabe der Quelle als Entlehnung kenntlich gemacht worden sind.

Johannes Schwall (Münster, den 10. Februar 2005)

# Literaturverzeichnis

**Algorithmic Solutions Software:** LEDA. Library for Efficient Data types and Algorithms. <http://www.algorithmic-solutions.com/>, 08.02.2005

**Diestel, Reinhard:** Graph Theory. New York: Springer Verlag, 1997

**Erten, C. und Kobourov, S. G.:** Simultaneous Embedding of a Planar Graph and Its Dual on the Grid. <http://arxiv.org/abs/cs/0206019>, 17.01.2005

**Fáry, István:** On straight line representation of planar graphs. 1948, S. 229–233

**Godsil, Chris und Royle, Gordon:** Algebraic Graph Theory. New York: Springer Verlag, 2001

**Hochstättler, Winfried:** Zur Topologie des Fußballs. <http://www.math.tu-cottbus.de/INSTITUT/lsgdi/fussball/fussballalleine.html>, 08.02.2005

**Hopcroft/Tarjan:** Efficient Planarity Testing. <http://www.gsia.cmu.edu/afs/andrew/gsia/ravi/WWW/Planarity/Papers/hopcroft-tarjan.pdf>, 17.01.2005

**Matula, David W., Marble, George und Isaacson, Joel D.:** Graph Coloring Algorithms. 1972, S. 109–122

**Schnyder, Walter:** Grid-embedding algorithm. <http://www.ics.uci.edu/~eppstein/gina/schnyder/>, 17.01.2005

**Tutte, W. T.:** Graph Theory as I have known It. Oxford, England: Oxford University Press, 1998

**Uhrig, Christian:** LEDA. (<http://www.linux-magazin.de/Artikel/ausgabe/1996/06/Leda/leda.html>), 08.02.2005

**Weisstein, Eric W.:** MathWorld: Affine Transformation. (<http://mathworld.wolfram.com/AffineTransformation.html>), 02.02.2005

**Weisstein, Eric W.:** MathWorld: Connected Graph. (<http://mathworld.wolfram.com/ConnectedGraph.html>), 25.01.2005

**Weisstein, Eric W.:** MathWorld: Finite Graph. (<http://mathworld.wolfram.com/FiniteGraph.html>), 08.02.2005

**Weisstein, Eric W.:** MathWorld: Jordan Curve. (<http://mathworld.wolfram.com/JordanCurve.html>), 25.01.2005

**Weisstein, Eric W.:** MathWorld: Planar Graph. (<http://mathworld.wolfram.com/PlanarGraph.html>), 25.01.2005

**Weisstein, Eric W.:** MathWorld: Point at Infinity. (<http://mathworld.wolfram.com/PointatInfinity.html>), 25.01.2005

**Ziegler, Joachim:** LEDA. Algorithmen für planare Graphen. (<http://www.leda-tutorial.org/de/inoffiziell/ch05s03s07.html>), 08.02.2005